Atkinson type explicit formula for a certain Dirichlet series and its application (Analytic Number Theory : related Multiple aspects of Arithmetic Functions)

石川, 秀明

数理解析研究所講究録
第 1806 巻 2012 年 143-155

Atkinson type explicit formula for a certain Dirichlet series and its application

Hideaki Ishikawa (Nagasaki University)

1. Introduction

本講演では、アトキンソン型公式と言われるものについての解説と、最近得られた結果について紹介した。本原稿の前半では、アトキンソン型公式とは何かについて紹介する。その歴史、証明の概略、どんな応用があるのかについて述べたい。中盤ではディリクレ L 関数についての話題に触れる。最後に、最近得られた、リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ にディリクレ多項式 $A(s)$ を乗じた関数 $\zeta(s)A(s)$ についてのアトキンソン型公式とその応用について紹介する。この $\zeta(s)A(s)$ についての結果は名古屋大学の松本耕二氏との共同研究の成果である。

リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ は、級数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},$$

で定義される複素数 $s=\sigma+it$ の関数である。この級数は $1<\sigma$ で絶対かつ広義一様収束であるので、その右半平面で正則であることがいえる。さらに、左半平面へ解析接続をすることができて、$s=1$ でのみ一位の極をもち、それ以外では正則な有理型関数となる。$\zeta(s)$ を考察する場合、複素平面における帯状領域 $0\leq\sigma\leq 1$ を臨界領域、さらにその中心線 $\sigma=1/2$ を臨界線と呼んでいる。臨界領域における $\zeta(s)$ の挙動を明らかにすることは難しく、$|\zeta(s)|$ の評価についてはリンデレフ予想といわれるものがある。リンデレフ予想とは、任意に小さい正数 ε に対し,

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)=O(t^{\epsilon}),\quad \text{for}\quad |t|\geq 2, \tag{1}$$

が成立するというものである。ここで O 記号についてであるが、関数 $f(x)$ と非負実数値関数 $g(x)$ に対し、ある正定数 C が存在し、$|f(x)|\leq Cg(x)$ が指定された x の範囲で成立している状況を $f(x)=O(g(x))$ と表す。また、$f(x)\ll g(x)$ とあれば $f(x)=O(g(x))$ と同じ意味とする。今の (1) の場合は、O-定数は ε に依存する。また、今後 ε が出てきたら、それは任意に小さい正数を意味することにする。

この (1) を積分の観点から述べた同値命題が知られている。任意の $k\in\mathbf{N}$ に対し,

$$\frac{1}{T}\int_0^T\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^{2k}dt=O(T^{\epsilon}),\quad \text{for}\quad |T|\geq 2,$$

が成立する、というものである。この場合は、O-定数は k,ε に依存する。この二通りのリンデレフ予想の記述は臨界線上での挙動について述べたものであるが、$1/2<\sigma<1$ における積分の観点から記述する同値命題も知られている。また、対応する数論的問題としては一般化された約数問題がある。数論的関数 $d_k(n)$ を

$$\zeta(s)^k=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d_k(n)}{n^s}\quad \text{for}\quad \Re s>1,$$

で定義する。$k=2$ の時の $d_2(n)$ が通常良く知られた約数関数で、これを単に $d(n)$ と表すのが習わしである。$D(x)=\sum_{n\leq x}d(n)$ を考える問題がいわゆる約数問題であり、$D_k(x)=\sum_{n\leq x}d_k(n)$ を考えるのが一般化された約数問題である。

$$D_k(x)=xP_k(\log x)+\Delta_k(x),$$

ここで右辺の $P_k(t)$ は次数 $k-1$ のある多項式であり、右辺一項目が主要項である。二つ目の項（誤差項）$\Delta_k(x)$ の挙動についての記述という形でリンデレフ予想を述べることもできる。リンデレフ予想にアタックする場合、どの問題設定を選ぶかは人それぞれであろう。ただ、ここで断っておくが、本稿はリンデレフ予想にアタックする話ではない（残念ながら）。ただ、後に数回ほどリンデレフ予想という用語が出てくるので、そのために最初のほうで簡単に説明をしておいた。

ここからが本題である。まず最初に $\zeta(s)$ の絶対値二乗平均について考えてみたい。1920 年代には、既に

$$\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt = T\log T + (2\gamma - 1 - \log 2\pi)T + O(T^{1/2+\epsilon}) \quad \text{as} \quad T \to \infty,$$

という漸近式が知られていた（ここで γ は Euler 定数である）。この右辺の O 誤差項部分を $E(T)$ とおいたときに、$E(T)$ に対する上から評価はどこまで改良できるだろうか。例えば

$$\begin{aligned} E(T) &= O(T^{1/3+\epsilon}) && \text{R. Balasubramanian (1978)} \\ E(T) &= O(T^{139/429+\epsilon}) && \text{J. L. Hafner \& A. Ivić(1989)} \\ E(T) &= O(T^{137/432+\epsilon}) && \text{M. N. Huxley (2002),} \end{aligned}$$

なる結果が知られている。ここでは、たまたま三つほど紹介したが、実際は多くの数学者たちによる改良の長い歴史がある。この評価改良のレースの行き着く先には

$$E(T) = O(T^{1/4+\epsilon}),$$

が予想されている（このべきを 1/4 よりも小さくはできないことは知られている）。

ここで、少し疑問が湧く。なぜ、これほどまで執拗に $E(T)$ の研究をするのか。上からの評価をすることにどんな意味があるのだろうか。実は $E(T)$ の上からの良い評価が、$\zeta(s)$ 本体の良い評価に直結する。l, A, δ は定数で $l \in \mathbf{N}$, A は任意に与えた正の定数, $0 < \delta < 1/2$ を満たしているとする。このとき $t \geq 2$ に対し,

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)^l \ll (\log t)\frac{1}{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it+iv\right)\right|^l dv + t^{-A},$$

なる評価はよく知られた事実である。この不等式で $l=2$ とし、さきほどの $E(T)$ の定義 $E(T) = \int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt - T\log T - (2\gamma-1-\log 2\pi)T$, を組み合わせると直ちに

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)^2 \ll (\log t)^2 + (\log t)\frac{1}{\delta}\Big(E(t+\delta) - E(t-\delta)\Big) + t^{-A}.$$

を得る。もし仮に $E(t) = O(t^\alpha)$ なる結果を得たとする。不等式において $\delta = 1/4$ とし、$E(t+\delta) - E(t-\delta) \leq |E(t+\delta)| + |E(t-\delta)|$ と雑に評価をしたとしても、このことから、$\zeta(1/2+it) = O(t^{\alpha/2}\sqrt{\log t})$ という評価が得られる。また、横着せずに差 $E(t+\delta) - E(t-\delta)$ をもっと詳細に調べることで、さらなる良い評価の証明の可能性も残っている。この $E(T)$ 評価と $|\zeta(s)|$ 評価の関係については [10], p173 - 174 周辺に詳しい解説が見られる。このような $\zeta(s)$ 評価への還元があるから $E(T)$ を研究するのだ、という人もいるだろう。一方で、ただ単に $E(T)$ の挙動自体が興味深くて研究しているのだという人もいるだろう。実際 $E(T)$ は不規則でありながら、なんらかのルールにより統制されているかのような不思議な振る舞いを見せる。その研究動機は人それぞれであろう。次の章ではアトキンソン型公式と呼ばれる $E(T)$ の表示式を紹介する。それは $E(T)$ の挙動を調べる際に重要な役割を演じる公式である。

2. On Atkinson's formula for $E(T)$ and its application

1949 年に F.V. Atkinson が以下の結果を証明した：

F.V. Atkinson [1] (1949)

$$
\begin{aligned}
E(T) &= \left(\frac{2T}{\pi}\right)^{1/4}\sum_{n\le X}(-1)^n\frac{d(n)}{n^{3/4}}e(T,n)\cos(f(T,n)) \\
&\quad -2\sum_{n\le l(T,X)}\frac{d(n)}{n^{1/2}}\left(\log\frac{T}{2\pi n}\right)^{-1}\cos\Big(g(T,n)\Big)+O(\log^2 T),
\end{aligned}
$$

under the condition $T \ll X \ll T$, where

$$
\begin{aligned}
e(T,u) &= \left(1+\frac{\pi u}{2T}\right)^{-1/4}\left(\sqrt{\frac{2T}{\pi u}}\operatorname{ar\,sinh}\sqrt{\frac{\pi u}{2T}}\right)^{-1}, \\
f(T,u) &= 2T\operatorname{ar\,sinh}\sqrt{\frac{\pi u}{2T}}+\sqrt{2\pi uT+\pi^2u^2}-\pi/4, \\
g(T,u) &= T\log\frac{T}{2\pi u}-T+2\pi u+\frac{\pi}{4}, \\
l(T,u) &= \frac{T}{2\pi}+\frac{u}{2}-\sqrt{\frac{u^2}{4}+\frac{uT}{2\pi}}.
\end{aligned}
$$

これがどれくらい凄い結果なのかはすぐに判断がつかない。実際、この結果が注目されるのは、その約 30 年後になる。

D. R. Heath-Brown [3] (1978)

$$
\int_2^T E(t)^2dt = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n)^2}{n^{3/2}}T^{3/2}+F(T)
$$

with $F(T)=O(T^{5/4}\log^2 T)$.

この結果から直ちに $E(T)=\Omega(T^{1/4})$ が従うことは明らかであろう。

Remark 1. ここで Ω 記号について少し説明しておく。$f(x)$、$g(x)$ はともに実数値関数を考える。$f(x)=\Omega_+(g(x))$ （ $x\to\infty$ ）とは正定数 c と $n\to\infty$ のとき $x_n\to\infty$ となる数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して $f(x_n)>cg(x_n)$ がすべての n に対して成立することである。 $f(x)=\Omega_-(g(x))$ （ $x\to\infty$ ）も同様に定義される。それは、正定数 c と $n\to\infty$ のとき $y_n\to\infty$ となる数列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して $f(y_n)<-cg(y_n)$ が すべての n に対して成立することである。その意味から、考えている関数 $g(x)$ は正の値をとる関数で使用することが普通である。Ω_+、Ω_- の両者が成立する場合 $f(x)=\Omega_\pm(g(x))$ と表す。そして $|f(x)|=\Omega_+(g(x))$ のことを単に $f(x)=\Omega(g(x))$ と書く。この時は $f(x)$ が複素数値関数であっても意味はある。

Heath-Brown のこの $E(t)$ の二乗平均の証明は、先に述べた Atkinson 型公式を用い二乗を計算して、その結果に対して積分を考える。対角成分からは主要項を取り出し、一方で非対角部分からの項に対しては積分による値の打ち消しあいを期待する。実際に指数型積分の打ち消しの効果を丁寧に計算することで、先ほどの結果を得るのである。解析数論の専門家から見た場合、ほぼ自明な計算でことたりる証明である。その漸近公式から直ちに得られるオメガ結果 $\Omega(T^{1/4})$ に限って言えば、前年に Good により得られていたものなのだが、Heath-Brown の仕事はアトキンソン型公式を用いれば Ω 結果を比較的容易に証明できることを示している。このHeath-Brown の仕事は、誰にも気づかれず埋もれていた（言い過ぎか？）アトキンソン型公式の価値に気付き、光を当て、それを世に知らしめたという点で歴史的重要な意味を持つ。 実際、この Heath-Brown の仕事以降、アトキンソン型公式は俄然注目を浴びることになる。多くの研究者によりアトキンソン型公式のもたらす応用が模索され、同時にその証明の独創性にも関心が集まった。Heath-Brown 以降に得られたアトキンソン型公式の応用例として、J. L. Hafner & A. Ivić による次の結果も有名である：

J. L. Hafner & A. Ivić [2] (1989)

$$
\begin{aligned}
(2)\qquad \int_2^T E(t)dt &= \pi T + \frac{1}{2}\left(\frac{2T}{\pi}\right)^{3/4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{d(n)}{n^{5/4}}\sin\left(2\sqrt{2\pi nT}-\frac{\pi}{4}\right)\\
&\quad +O(T^{2/3}\log T),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(T) &= \Omega_+\left((T\log T)^{1/4}(\log\log T)^{(3+\log 4)/4}\exp\left(-c_1\sqrt{\log\log\log T}\right)\right),\\
E(T) &= \Omega_-\left(T^{1/4}\exp\left(c_2\frac{(\log\log T)^{1/4}}{(\log\log\log T)^{3/4}}\right)\right),\\
E(T) &= O\left(T^{139/429}(\log T)^{1467/429}\right),
\end{aligned}
$$

where c_1, c_2 are some positive constants.

J. L. Hafner & A. Ivić による上記の結果は、アトキンソン型公式の応用、またはアトキンソンの証明のアイディアを利用している。この Ω_+ と Ω_- の結果は、$E(T)$ の複雑で繊細な振動を見事にとらえたものであり、驚異的な結果に（私には）見える。また、この上からの O 評価も見事で、当時としては最良の結果である。

この他に 1994 年の Heath-Brown & K.Tsang による $E(T)$ が符号を変えるタイミングについての詳細な結果 [4] もアトキンソン型公式の応用例として知られている。その内容については、後ほど触れるディリクレ L 関数の話題において紹介する。このようにアトキンソン型公式は $E(T)$ の振動状況を探る際に大変有効な武器となることが、その応用結果の豊富さから納得できよう。

ここまではアトキンソン型公式についての歴史、応用について述べてきた。次の章ではアトキンソン型公式の証明方法について紹介する。リーマンゼータ関数の場合その証明にはディリクレ級数表示の係数が 1 であるという特殊性が暗黙のうちにあちらこちらで使われている。一般のディリクレ級数で定義された関数

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c(n)}{n^s}$$

に対しても同様の公式が成立するのかというと、ほとんどの場合でうまくいかない。ここで、状況を正確に確認しておきたいのだが、我々は

$$\int_0^T |F(\sigma+it)|^2 dt \tag{3}$$

なる積分に対して考察をし、その誤差関数に対するアトキンソン型公式の類似を求めるということを考えることにする。少し手を動かして計算した方なら分かると思うが、この時ほとんどの場合でアトキンソン型公式の証明はうまくいかない。例えば $c(n)$ としてディリクレ指標 $\chi(n)$ を考えたディリクレ L 関数の場合ではどうか。χ が実指標の場合は簡単である。ここでいいう「簡単」という意味は $\zeta(s)$ の場合の証明をもとに形式的模倣で証明できるという意味である。ところが χ が複素指標の場合は突然難しくなる。このことについては後に詳しく述べる。また、一点注意しておきたいことがある。

$$\int_{-T}^T |F(\sigma+it)|^2 dt \tag{4}$$

という積分を考え、そのアトキンソン型公式を出すという設定の場合は (3) を考えるよりは問題は簡単になる。例えば、(4) の場合であれば χ が複素指標の場合でも証明は易しい。では、なぜ考える積分区間を $-T$ から T までにすると問題が簡単になってしまうのか。このことも含めて、アトキンソン公式の証明の難しさと問題点をわかってもらうためにも、$\zeta(s)$ のアトキンソン型公式証明の概略を次章で紹介する。

3. The sketch of proof of Atkinson's formula for $E(T)$.

変数の置き換えにより

$$\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt = -i\int_{1/2+i0}^{1/2+iT} \zeta(u)\zeta(1-u)du \tag{5}$$

が成立する。右辺の被積分関数 $\zeta(u)\zeta(1-u)$ をどのような解析接続形で表すかが、この平均値考察にとって大事である。アトキンソンは最初に、$\Re u>1, \Re v>1$ に変数を固定しておき, 次のような級数の並び替えを行った：

$$\begin{aligned} \zeta(u)\zeta(v) &= \left(\sum_{m=n}+\sum_{m<n}+\sum_{m>n}\right)\frac{1}{m^u}\frac{1}{n^v} \\ &= \zeta(u+v)+\zeta_2(u,v)+\zeta_2(v,u). \end{aligned} \tag{6}$$

この右辺に、いわゆる Euler - Zagier 型二重ゼータ関数 $\zeta_2(\dots)$ が現れる。

Remark 2. この項の並べ替えを今日アトキンソン分割と呼ぶ。$\zeta(s)$ 絶対値の高次べき平均値を考える場合、どのように級数を並び替えて、どのような多変数ディリクレ級数の和で $|\zeta(s)|^{2k}$ を表示するのかが重要になる。リンデレフ予想攻略のためにはこの解釈の仕方が大変重要になってくると考えられているが、そのような発想はアトキンソンの証明をきっかけにして始まったといえる。

アトキンソンは $\zeta_2(\dots)$ にたいする解析接続を行い、その後で $v\to 1-u$ なる極限操作を行い、多変数ディリクレ級数の特異点からの情報を取り出すことで領域 $0<\Re u<1$ において,

$$\zeta(u)\zeta(1-u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma'(1-u)}{\Gamma(1-u)}+\frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}\right)+2\gamma-\log 2\pi+g(u)+g(1-u), \tag{7}$$

なる表示を得る。ここで $g(u)$ は積分で定義されたある関数であるが、その定義はここでは省略する。さらに、この $g(\dots)$ に対し、約数関数 $d(n)$ の平均がボロノー

イ公式といわれるものを持つことを利用し、$0 < \Re u < 1$ における適切な表示にした後に、(7) を (5) の右辺に代入して計算し、

$$\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt = \text{Main term } + O(1) - i\int_{1/2+i0}^{1/2+iT} g(u)+g(1-u)du,$$

を得る。ここまではいわば多重ディリクレ級数の解析接続の問題といえる。そしてこの後に、まだまだ大きな山場が残っている。右辺最後の積分は、積分で定義された関数 $g(\ldots)$ の積分である。つまり二重積分の状態になっている。ここで積分順序の交換を行った後に、内部積分の計算を行う。$1/2+iT$ 部分からある指数型積分が生じる。その積分に対して鞍部点法を駆使して主要項を取り出す。一方で、$1/2+i0$ に対応した指数型積分の取り扱いは大変難しく、一見手に負えない。そういった手に負えない積分たちが複数個生じるのだが、それらが幸運にもお互いに打ち消しあい、完全に計算上から消えてなくなる。この $1/2+i0$ からの指数型積分の消滅が大変重要な点であることを注意しておきたい。

実際には、アトキンソンはその原証明において

$$\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt = \frac{1}{2}\int_{-T}^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt$$

なる関係に注目し、この右辺を計算している。実はこの等式がとても大事で、これは $|\zeta(1/2+it)|$ と $|\zeta(1/2-it)|$ の値が同じ（上半平面と下半平面の実軸対象な点での値が絶対値で考えた場合同じ）であるという事実に基づく。一般のディリクレ級数ではこのようなことは期待できない。そして、

$$= -i\frac{1}{2}\int_{1/2-iT}^{1/2+iT} \zeta(u)\zeta(1-u)du$$

と考えて、右辺の $\zeta(u)\zeta(1-u)$ にさきほどと同じ解析接続形を代入し議論を進める。この場合は、先に述べたような $1/2+i0$ に対応した指数型積分は初めから計算中に顔すら出さない。$1/2\pm iT$ 部分から生じる指数型積分のみが生じ、それらは鞍部点法で処理可能なものとなっている。

結局、$\zeta(s)$ の場合、この $1/2+i0$ に対応した指数型積分の問題は、消滅してしまい証明の障害にはならない（アトキンソンの原証明を見ている限りはその問題を意識する必要すらない）。ところが、他のゼータ関数でアトキンソン型公式の類似を証明しようとした場合、まずはアトキンソン分割により生じる多重ディリクレ級数の解析接続の問題がある。この時ただ解析接続できただけでは駄目で「しかるべき解析接続形」を要求される。それを乗り越えたとしても、今度は $1/2+i0$ に由来する指数型積分の問題が待っている。例えば次章で紹介するディリクレ L の関数の場合、χ が複素指標の時にこの $1/2+i0$ に由来する指数型積分の問題が大きな障害となる。

それにしても、アトキンソンの証明は凄いと思う。$\zeta(s)$ の絶対値の二乗平均を、あえて多変数複素関数の議論にもちこむ発想（実はそれが $\zeta(s)$ の挙動をとらえるための自然な見方なのかもしれないが）。そして巧妙な解析接続。複雑な指数型積分を鞍部点法でさらりとねじ伏せる計算力。感動する。

Remark 3. 普通、$\zeta(s)$ の臨界線上での良い評価を得るためには、$\zeta(s)$ のよい解析接続形を得ることが何より重要である。そして、その得られた解析接続形に対し様々な解析数論的テクニックを投入し $\zeta(s)$ の評価を行う。リンデレフ予想に迫るにはそのようなアプローチの他に、先にも述べた $E(T)$ の評価から $\zeta(s)$ の評価への還元という方法もある。では、どちらのほうがリンデレフ予想に迫るために有効な攻めかたなのだろうか？現段階ではどちらともいえないのだと思う。また、アトキンソン型公式よりも優れた $E(T)$ の表示式を与えることはできるのだろうか。凄く気になる。

4. On Dirichlet L function

この章ではディリクレの L 関数 $L(s,\chi)$ のアトキンソン型公式とその応用について述べる。$\chi(n)$ は mod q のディリクレ指標とする。このときディリクレの L 関数 $L(s,\chi)$ とは級数

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s},$$

で定義される関数で, χ が単位指標 χ_0 でないときは、この級数は $0<\sigma$ で広義一様収束していて、そこで正則な関数を与えている。さらに解析接続によって整関数であることがわかる。$L(s,\chi)$ 考察時も、帯状領域 $0\leq\sigma\leq 1$ を臨界領域、その中心線 $\sigma=1/2$ を臨界線と呼ぶ。ここで臨界線上での絶対値二乗平均を考え、その mod q のすべての指標にわたる和をとってみる:

$$\int_0^T\sum_{\chi \bmod q}\left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right|^2dt.$$

実際は Σ は上記のように積分内に入れてしまい議論する。この時、その主要項がどのようになっているのかは知られている。この際の誤差項を $E(T,q)$ とする。1986 年に T. Meurman がこの $E(T,q)$ のアトキンソン型公式を証明し、その数論的問題への応用を与えた (see [11])。その時のアトキンソン型公式の証明はそれほど難しくはない。$\sum_{\chi \bmod q}$ なる和を考えていることで結果的に被積分関数自体が扱いやすい形になる。そして証明が難しくないといった最大の理由は

$$\int_0^T\sum_{\chi \bmod q}\left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right|^2dt=\frac{1}{2}\int_{-T}^T\sum_{\chi \bmod q}\left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right|^2dt$$

が成立しているからである。これにより、既述したような $1/2+i0$ からの指数型積分の問題は生じない。むろん考慮する変数が $\zeta(s)$ のときよりは少し増えるので、計算が少しわずらわしくなるが、実際は $\zeta(s)$ のときの証明手順に従い丁寧に計算すれば証明がなされる。特にオリジナルのアイディアを必要としない。

一方、一個の $L(s,\chi)$ の絶対値二乗平均に対してはどうであろうか。この平均を考えた時の誤差項を $E(T,\chi)$ とする:

$$\int_0^T\left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right|^2dt=\quad \text{Main term}+E(T,\chi).$$

この誤差関数 $E(T,\chi)$ に対するアトキンソン型公式は証明できるのか。また証明できたとして、何か応用はあるだろうか。自分が大学院生時代に勉強のつもりで計算してみたところ、χ が実指標の場合はうまくいくのだが、複素指標の場合はアトキンソンのオリジナルのアイディアに従うだけでは証明が難しいことに気づいた。まず χ が複素指標のときは

$$\int_0^T\left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right|^2dt=\frac{1}{2}\int_{-T}^T\left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right|^2dt \tag{8}$$

は一般には成立しない。であるので、直接左辺を扱う必要がある。

$$\begin{aligned}\int_0^T\left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi\right)\right|^2dt &= -i\int_{1/2+i0}^{1/2+iT}L(u,\chi)L(1-u,\overline{\chi})du\\ &= \text{Main term}+O(1)\\ &\qquad -i\int_{1/2+i0}^{1/2+iT}g(u:\chi)+g(1-u:\overline{\chi})du.\end{aligned}$$

という流れになる。ここで $g(u:\chi)$ は積分で定義されたある関数である（その定義は省略)。議論の最初のほうで行うアトキンソン分割から生じる二重 L 関数に対しては、二重ゼータ $\zeta_2(\ldots)$ に対して用いた技術が通用する。そして、実際に望むような解析接続形が得られる。この二重 L 関数の解析接続の部分は既に [12] において論じられていた。問題は証明の後半である。$1/2+i0$ に対応して生じる指数型積分の処理で手詰まりになる。当初は、その難しさを知る由もなく計算を始めたのだが、実際証明しようと思えば、既述したような指数型積分の問題に直面する。そこで、当時いろいろな文献を当たってみたが、どうもこの問題は証明されていないようであった。時折、「$\zeta(s)$ のときと同様に証明できるであろう」というコメントを見ることはあったのだが、実際に公刊されたものは見つけることは出来なかった。

Remark 4. $1/2+i0$ から生じる積分が障害となると指摘してきたが、では $\int_2^T |L|^2 dt$ ように積分の下端を 0 から離せばいいのではないか？と疑問をもたれた方もいるかもしれない。しかし、a を正の定数とし、$\int_a^T |L|^2 dt$ を考えたとしても、やはり $1/2+ia$ から生じる指数型積分の扱いが難しいのである。0 から離すにしても、定数から積分が始まるような設定では何も問題は解決しないことは実際に計算してみるとわかります。

そこで、この $1/2+i0$ からの障害を回避するために、短区間の積分 $\int_T^{2T} |L(\ldots)|^2 dt$ に対するアトキンソン型公式を求め、その結果を継ぎ足すことにした。それは Hafner & Ivić が $\int_2^T E(t)dt$ の漸近公式 (2) の証明で行った方法の真似である。この場合、新たに評価せねばならないディリクレ多項式が生じるという問題が起こる。Hafner & Ivić は Jutila のディリクレ多項式の双対性についての結果 [9] を本質的な部分で使用して難局を乗り切った。では、今回はどうであろうか。我々の状況には Jutila のディリクレ多項式の変換公式がうまく機能しないことが長い計算の末に判明する。この時点で一瞬心が折れそうになった。が、実際に手を動かして誠実に計算し失敗し続けたおかげで、事の本質が鮮明に浮かび上がった。そこで、結局 Hafner & Ivić のように Jutila の変換公式を用いる方法をやめて、自分独自の方法で証明をするのだが、どうやって証明したかの解説は [7] を見てください。結果的には Jutila のディリクレ多項式の変換公式に相当するものを全く異なる方法で証明したことになっている。この時点で「χ が複素指標のときの $L(s,\chi)$ の証明は決して $\zeta(s)$ と同様ではなく、工夫を要する」ことが分かったので、論文として出版可能かなと判断した。

ちなみに χ が実指標のときは、(8) が成立するので $\zeta(s)$ の証明の真似をするだけで可能である。これが χ が実指標のときは易しいといった理由である。また、(4) のアトキンソン型公式を求める設定は (3) を扱うよりも簡単であるといった理由も、わかっていただけたかと思う。

次にとりかかったのが、その応用である。以前から、気になっていたことがある。同じ mod の χ による L 関数の挙動はどれくらい似ているのか？違うとすればどこがどの程度違うのか？という疑問である。ここでは絶対値二乗平均という観点で、比較してみよう。考えている mod が同じ原始的指標の L 関数の場合、絶対値の二乗平均の主要項の形は χ に依存せず全く同じ形になることは知られている。そこで次のような量 $\Lambda(T)$ を考えてみる：

$$\Lambda(T) = \int_0^T \left| L\left(\frac{1}{2}+it, \chi_j\right)\right|^2 dt - \int_0^T \left| L\left(\frac{1}{2}+it, \chi_k\right)\right|^2 dt,$$

ここで χ_j と χ_k は mod q の原始的ディリクレ指標であり、$\chi_j \neq \chi_k$ とする。既述したように mod が同じ原始的指標の L 関数の場合、絶対値の二乗平均の主

要項の形は χ に依存せず全く同じ形になるので結局この量は

$$\begin{aligned} &= \text{Main term} + E(T,\chi_j) - \Big(\text{Main term} + E(T,\chi_k)\Big) \\ &= E(T,\chi_j) - E(T,\chi_k). \end{aligned}$$

である。では、この差はどのように変化するのか？ちなみに $E(T,\chi) = O(T^{\alpha+\epsilon})$ としたときの α の best possible は 1/4 であることはいえるだろう（アトキンソン型公式を証明してしまっているので、それを用い $E(T,\chi)$ の二乗平均を求めることでいえるはずなのだが、厳密に言うとちゃんと計算していない）。ではここで問題である。

問題. $\Lambda(T) = O(T^{\alpha+\epsilon})$ としたときに、$\alpha = 1/4$ が best possible なのか？

これは、そう簡単には結果を予想できないと思う。$\Lambda(T)$ とは実際は差 $E(T,\chi_j) - E(T,\chi_k)$ というものを考えているわけなので、互いの打ち消しあいにより、べきが 1/4 よりも小さくなる可能性も十分考えられる。では実際はどうなのか。それは以下の結果によって言える：

H. Ishikawa [5] (2006)

Assume that χ_j and χ_k are primitive characters mod q and $\chi_j \neq \chi_k$. Then

$$\int_2^T \Lambda(t)^2 dt = CT^{3/2} + \mathit{error},$$

where C is a certain constant $\neq 0$. Clearly $\Lambda(T) = \Omega(T^{1/4})$ from the result.

実は 1/4 が best possible なのであった。この漸近公式の証明は得られた L 関数のアトキンソン型公式同士の差を考え（これが、またアトキンソン型公式のような状態になる。この事実が大変重要）、その表示式を二乗し積分しただけであり、Heath-Brown の アイディアに従っているだけである。ただ、この際に出てくる係数 C が一見 0 なのか否かを判断することができない級数で与えられているため、実際にその値が $\neq 0$ であることを示すことが肝要で、ここは少しばかり独自に頭を使った。「ああ、この問題はきっと結果はこうなるんじゃない、証明の方針はこうで……」とは簡単に予測がつかない（と自分では思っていますが、これを読んでいる少数の方、もし簡単な証明があればご一報をください）ものに対し、きっちりと結果を出せたので公表する価値はあるだろうと判断した。

こうなってくると、$\Lambda(T)$ について、様々なことが言えそうである。まあ、こんな量は誰も気にしたことがないのかもしれないが、私にとっては結構以前から気になっていた対象だったので、色々とやってみたくなった。そこで考えたのが、

問題. $\Lambda(T)$ に対する $\Omega_{\pm}(\dots)$ はどうなるのか？

問題. $\Lambda(T)$ はどの程度頻繁に 0 になるのか？

つまり $E(T,\chi_j)-E(T,\chi_k)$ の $\Omega_\pm(\dots)$ はどうなるのか？どの程度頻繁に $E(T,\chi_j)$ と $E(T,\chi_k)$ の値が一致するのか？という問いである。これについては、次の結果が得られた：

H. Ishikawa [6] (2007)

Assume that χ_j and χ_k are primitive characters mod q and $\chi_j \neq \chi_k$. Then there exist T_0, c_1, c_2 such that, for each $T > T_0$ there exist t_1, $t_2 \in [T, T+c_2\sqrt{T}]$ satisfying $\Lambda(t_1) > c_1 t_1^{1/4}$ and $\Lambda(t_2) < -c_1 t_2^{1/4}$.

これは、$E(T)$ のアトキンソン型公式の応用の紹介においてちょっとだけ触れた Heath-Brown & K,Tsang の仕事の類似である。$E(t)$ が上述の区間で同様に変化しているというのが彼らの結果であって、うまい重み関数を構成し、$E(t)$ に乗じて、その積分を考察し $E(t)$ 自体の挙動を推察するのである。今述べた $\Lambda(t)$ についての結果は彼らの仕事の単なる真似であり、問題設定自体と証明方針に私のアイディアは何もない。ひとたび L 関数のアトキンソン型公式が得られてしまえば、その差 $E(t,\chi_j)-E(t,\chi_k)$ についても、アトキンソン型公式の状態に表示できることが可能であると先に述べたが、このことより、Heath-Brown & K,Tsang のアイディアが $\Lambda(t)$ すなわち $E(t,\chi_j)-E(t,\chi_k)$ にも通用しそうな感じがするわけである。同じような結果になるのかな？でも、もしかしたら全く予想を裏切るような結果が出てくるかな？などと考えつつ、とりあえずやってみた。ただ同様の結果になってしまった時に、その証明に私自身のアイディアが全くなかった場合は公表する価値があるのか悩むところである。きっと「大学院生の計算問題レベルでしたね」と批判されるだろう。それは怖い。しかし幸いにもその証明において少し工夫しなければならない部分があった。これについて説明をしたい。「ただ形式的に真似をするだけでできるんじゃないのか」と誤解されるのが嫌なので。

まず、$E(T)$ の場合、アトキンソン型公式の最初の有限和において約数関数 $d(n)$ が各項に含まれている。約数関数は0にはならない。この事実が効いて $n=1$ の項から Heath-Brown & K,Tsang は主要項をとりだすのである。一方で、$E(t,\chi_j)-E(t,\chi_k)$ に対するアトキンソン型公式の場合、各項に含まれるある数列は0になるか否か判断できないような状態になっている。そこで、その数列が0にならないような最初の項に注目し、その項から主要項を取り出す計算が要請される。すると、応じて構成する重み関数を独自に微調整する必要に迫られる。最初は形式的模倣でできる程度かと思い気軽に始めた計算だったが、実は重み関数を相当慎重に構成せねばならないのだった。試行錯誤の末にうまい重み関数を構成できて証明は成功するのだが、ここに私自身のアイディアがあると思っている。証明にそれなりの独自の工夫を要したので、これは非自明な結果と判断し発表した。

ここで大事なことがもうひとつあるので述べたい。考えている $\Lambda(T)$ において $\chi_k=\overline{\chi_j}$ としてみると、

$$\Lambda(T)=\int_0^T \left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi_j\right)\right|^2 dt-\int_{-T}^0 \left|L\left(\frac{1}{2}+it,\chi_j\right)\right|^2 dt$$

である。χ_j が実指標のときはこの値は明らかに恒等的に0であるが、問題は χ_j が複素指標のときである。そのとき、この値は恒等的に0ではない（これは(8)が一般に成立しないことの言い換えである）。そもそも、このことが χ が複素指標のときのアトキンソン型公式証明を難しくする原因の始まりであった。逆にいえば、我々は、得られたアトキンソン型公式を利用することでこのずれ具合を論じることが可能になっているのである。先に述べた二つの定理をここにあてはめれば、上半平面と下半平面でのずれ具体は定理で述べたような状況だということになる。

ここまで述べた L 関数についての内容は二本の論文 [5] [6] に公表している。また２００３年の数理研でも発表し講究録 [7] にもまとめているのだが、当時の文章を見返すと、周辺事情、その難しさ、意義などについてうまく説明しきれていないことがいつも気になっていた。機会があれば、当時の補足も兼ねてアトキンソン型公式についての話題を紹介したいと思っていたので今回は少しばかり（のつもりであったがかなり長くなってしまった）ディリクレ L 関数のことについて再度触れた。

ちなみに、ここで論じたものは絶対値の二乗平均の差であったが、差の絶対値の二乗平均

$$\int_0^T \left| L\left(\frac{1}{2}+it, \chi_j\right) - L\left(\frac{1}{2}+it, \chi_k\right)\right|^2 dt$$

の場合どのようになるのだろうか。第一主要項のみ求めるのでよいのであれば、それは以下のようである：

$$= 2\frac{\phi(q)}{q} T\log T + O_q(T\log^{3/4} T) \qquad (\chi_j \neq \chi_k),$$

ここで $\phi(q)$ はオイラー関数。この証明はさほど難しくない（L 関数の近似関数等式と Titchmarsh [13] p141, Theorem 7.3 に見られる計算技術程度でできる）。ただ、第二主要項以下をどこまで精密に書き下せるかと言われると、話は難しくなると思われる。この対象に対してアトキンソン型公式を書くと、それをもとに面白い結果がいろいろ引き出せそうな気がする（途中まで計算しているのでもし何か面白いことが証明できたら発表したい）。

ここまでを振り返ってみる。結局何が言えたのだろうか。ディリクレ L 関数のアトキンソン型公式が証明できると、それをもとに、個々の L 関数の差異についてや、上半平面と下半平面での挙動の違いなどを、かなり詳細に調べることが可能となったといえる。ただ、これが何か数論的問題に還元できているわけではない（現段階では）。私自身は「代数学」や「整数論」という分野に属していることになっているが、実際は特殊関数の関数論的性質への興味のほうが強い。もちろん整数論的問題との関連を全く意識していない訳ではないが、科研費申請のときにはどの分野で出すべきなのか迷うときがあります。

5. On recent results

最後に、最近得られた結果について述べたい。名古屋大学の松本先生との共同研究で、現在以下のようなものを考えている。

数列 $a(m) \in \mathbb{C}$ に条件 $a(m) = O(m^\varepsilon)$ for any $\varepsilon > 0$ を仮定する。そして

$$A(s) = \sum_{m \le M} a(m) m^{-s} \qquad (M \ge 1)$$

を考える。このとき

$$\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) A\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2 dt = \quad M(T,A) + E(T,A),$$

ここで

$$M(T,A) = \sum_{k \le M}\sum_{l \le M} \frac{a(k)\overline{a(l)}}{[k,l]}\left(\log\frac{(k,l)^2 T}{2\pi k l} + 2\gamma - 1\right) T,$$

(k,l) は k と l の最大公約数、$[k,l] = kl/(k,l)$ は最小公倍数、$\overline{a(l)}$ は $a(l)$ の複素共役、γ は Euler 定数、$E(T,A)$ はこの絶対値二乗平均の誤差関数である。

この $E(T,A)$ に対するアトキンソン型公式の証明は可能かであろうか。$a(n) \in \mathbb{C}$ のときは簡単ではない。理由は $L(s,\chi)$ のときと同様である。上半平面での値と下

半平面での値がずれていることが理由となる。複素指標の L 関数の時と同じ困難が生じるわけだが、幸い同じ攻略法で攻めるとアトキンソン型公式が証明できる。それが今回、紹介する第一の結果である：

H. Ishikawa & K. Matsumoto [8] (2011)

$E(T,A)$ のアトキンソン型公式を証明。

この時点で紙面をだいぶ使用してしまっているので、この結果の詳細は省きます。そして、その応用として上半平面での値と下半平面でのずれ具合についての結果を証明した：

H. Ishikawa & K. Matsumoto (2011)

Let

$$D(T)=\int_0^T\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)A\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2dt-\int_{-T}^0\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)A\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2dt,$$

where

$$\alpha(k,l)=a(k)\overline{a(l)}-\overline{a(k)}a(l)=i2\Im(a(k)\overline{a(l)}),$$

$$C_M=\frac{1}{M^{3/2}}\sum_{\substack{k,l\le M\\ \kappa\lambda=\delta_0}}\frac{|\alpha(k,l)|}{[k,l]}(\kappa\lambda)^{3/4}\cos\Big(2\pi\frac{1}{\delta_0}\kappa\overline{\kappa}+\arg\alpha(k,l)\Big),$$

$$C'_M=\frac{1}{M^{3/2}}\sum_{\substack{k,l\le M\\ \kappa\lambda=\delta_0}}\frac{|\alpha(k,l)|}{[k,l]}(\kappa\lambda)^{3/4}\sin\Big(2\pi\frac{1}{\delta_0}\kappa\overline{\kappa}+\arg\alpha(k,l)\Big),$$

and

$$\delta_0=\max_{\substack{k,l\le M\\ \alpha(k,l)\neq 0}}\kappa\lambda.$$

Assume $\sqrt{C_M^2+C_M'^2}\neq 0$. Then there exist T_0, c_1, c_2 such that, for each $T>T_0$ there exist t_1, $t_2\in[T,T+c_2\sqrt{T}]$ satisfying $D(t_1)>c_1t_1^{1/4}$ and $D(t_2)<-c_1t_2^{1/4}$.

この結果について少し説明する。上半平面と下半平面でのずれ具合は、設定する $a(m)$ に応じて繊細に変化するであろうことが予想されるが、その状況を精密に書き下したものである。現段階では、いつ $\sqrt{C_M^2+C_M'^2}\neq 0$ となるのか否かを調べつつ、論文にまとめている。では、これらの最近の結果（$E(T,A)$ のアトキンソン型公式や、$D(T)$ の符号変化の結果）に何か数論的応用があるのかと問われると、現時点ではないというしかない。現在 $a(m)$ に具体的に様々な数列を設定しながら面白い問題を探っている。また、一応、将来的にはある平均値問題に試そうかというプランもある。その際に今回の結果が大きく効いてくるのではないかと思っている。

REFERENCES

[1] F. V. Atkinson, The mean-value of the Riemann zeta function, *Acta Math.* **81** (1949), 353-376.

[2] J. L. Hafner and A. Ivić, On the mean-square of the Riemann zeta function on the critical line, *J. Number Theory* **32** (1989), 151-191.

[3] D. R. Heath-Brown, The mean value theorem for the Riemann zeta-function, Mathematika **25** (1978), 177-184.

[4] D.R. Heath-Brown and K. Tsang, Sign changes of $E(T)$, $\Delta(X)$ and $P(X)$, *J. Number Theory*, **49** (1994), 73-83.

[5] H. Ishikawa, A difference between the values of $|L(1/2+it,\chi_j)|$ and $|L(1/2+it,\chi_k)|$ I, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **55** (2006), 41-66.

[6] H. Ishikawa, A difference between the values of $|L(1/2+it,\chi_j)|$ and $|L(1/2+it,\chi_k)|$ II, *Comment. Math. Univ. St. Pauli* **56** (2007), 1-9.

[7] H. Ishikawa, $L(1/2+it,\chi_j)$ と $L(1/2+it,\chi_k)$ の値の差について, 数理解析研究所講究録 *RIMS, No.1384* 解析的整数論とその周辺, (2004), 239-248.

[8] H.ishikawa and K.Matsumoto, An explicit formula of Atkinson type for the product of $\zeta(s)$ and a Dirichlet polynomial, *Cent. Eur. J. Math.*, **9** (1), (2011), 102-126.

[9] M. Jutila, Transformation formula for Dirichlet polynomials, *J. Number Theory*, **18** (1984), 135-156.

[10] K.Matsumoto, リーマンのゼータ関数, 朝倉書店, 2005.

[11] T. Meurman, A generalization of Atkinson's formula to L-functions, *Acta Arith.* **47** (1986), 351-370.

[12] Y. Motohashi, A note on the mean value of the zeta and L-functions II, *Proc. Japan Acad.* **61 A** (1985), 313-316.

[13] E. C. Titchmarsh, The theory of the Riemann zeta-function (second edition), Oxford University Press, Oxford, 1951.